Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

Grado en Estadística y Empresa

Universidad de Jaén

Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

Trabajo Fin de Grado

ÁLGEBRA LINEAL EMPRESARIAL

Alumno: José Aguilera Carrasco

Enero, 2019

RESUMEN

En este estudio se hace un análisis de las diferentes aplicaciones del álgebra lineal en diferentes campos, como por ejemplo en estadística o contabilidad. Además, se estudiará la teoría asociada a cada aplicación. Las aplicaciones a ver serán principalmente estadísticas (Análisis de Componentes Principales, Mínimos cuadrados en regresión lineal…) pero también se analizarán otras aplicaciones útiles del campo de la contabilidad (contabilidad agregativa) y en predicciones (cadena de Markov).

También se verán las herramientas informáticas a usar para realizar cada análisis y facilitar el trabajo a la hora de hacer cada técnica. En este contexto usaré software tal como “R”, “SPSS” o “Mathematica”.

Palabras clave: Matriz de probabilidad, Contabilidad agregativa, ACP, Markov, mínimos cuadrados, modelos lineales

ABSTRACT

In this study, I will do an analysis of the differents applications of linear algebra in different fields, such as statistics or accounting. Moreover, I will study the theory associated with each application. The main applications studied will be related with statistics (PCA, minimum squares in lineal regression...) and also with accounting (aggregative accounting), other applications related to predictions will be analyzed too (Markov chain).

The computer tools to do these analysis will be seen too, these tools will make easier the work with each analysis. The software used are programs like “R” ,“SPSS” or “Mathematica”.

Key words: Probability matrix, aggregative accounting, PCA, Markov, least squares, linear models.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Durante la carrera he visto como la gran mayoría de mis compañeros tenían pavor a la asignatura de Álgebra lineal, sin más razón aparente que su dificultad. Visto así, puede que sea un campo difícil de estudiar y de comprender, pero también es cierto que puede ser aplicado en muchas asignaturas y al que más utilidades se le puede sacar.

Tras cursar todas las asignaturas, he observado que en todas o casi todas las asignaturas hay una parte de álgebra que, aunque parece intangible, está ahí y sin ella no se podría desarrollar el temario.

Es por ello, que hace falta resaltar la gran importancia que tiene en toda la estadística (incluso en otros campos, como la contabilidad) y para ello he elaborado este trabajo, con la intención de resaltar los siguientes objetivos:

- **Influye en gran parte de los estudios estadísticos que realizamos en el grado**, un ejemplo puede ser el ACP. Por ello, un objetivo será esclarecer cómo funciona en los análisis más comunes que usamos en diferentes asignaturas del grado.
- Otro objetivo muy importante es el de **perder ese "miedo" a estudiar el álgebra y sus derivados**, ya que la dificultad no es tal como parece ya que se disponen de muchas herramientas (como el software estadístico o matemático, tal como el Mathematica o R) y básicamente, es indispensable para cualquier estudio/ámbito de trabajo.

Actualmente, el álgebra lineal es aplicada en diferentes ámbitos (como en campos estadísticos, empresariales, computación….) sin que prácticamente sepamos cómo y por qué se aplica.

En este trabajo de fin de grado, trataré de enumerar varias aplicaciones para tratar de esclarecer que es totalmente necesaria, y que está totalmente estigmatizada sin razón aparente.

2. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE ÁLGEBRA Y SUS APLICACIONES

2.1. MATRICES

2.1.1. CARACTERÍSTICAS

Denotaremos una matriz como **una "caja" de orden mxn** (donde tenemos m "filas" y n "columnas) que está formada por un conjunto de números o letras colocados en **"m" filas** y en **"n" columnas**.

Cada elemento lo denotaremos como $\mathbf{a_{i,j}}$, donde i es la fila y j la columna. Veamos un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$ Matriz de orden 3x2 donde 3 sería el elemento $a_{2,3}$

Otros conceptos relacionados con matrices son:

- Llamaremos "**Matriz fila**" a una matriz con una única fila y "**Matriz columna**" a una matriz con una única columna.
- Denotaremos como "**Matriz cuadrada**" a aquella que tenga el mismo número de filas que de columnas, es decir, que sea de orden nxn para n.
- Para una matriz A, llamaremos **submatriz** a la matriz que resulte de **eliminar una serie de filas/columnas de la matriz inicial**.
- En una matriz cuadrada, nos referiremos a su **diagonal** como a los elementos que forman su diagonal. En la siguiente matriz, la diagonal serán los elementos $\mathbf{a_{11}, a_{22} \ldots\ldots a_{n,n}}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}$$

- Denotaremos como **rango de una matriz** (rg(A)) a la cantidad de filas que son linealmente independientes. Una matriz de orden mxn, tiene que tener un rango menor al número menor entre las filas y las columnas. Básicamente, **rg(A) ≤ mínimo{m,n}**
- Dada una matriz A, su matriz traspuesta será **aquella cuyas filas son las columnas de A** (Una matriz mxn tendrá una matriz traspuesta de orden nxm).
  La denotaremos como A^t.

- Diremos que una matriz es **simétrica cuando sea igual a su matriz traspuesta**. Es decir, si $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ entonces $A^t \in M_{nxm}(\mathbb{R})$

MATRICES TRIANGULARES E IDENTIDAD

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{13}} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Una matriz cuadrada es una matriz triangular superior, cuando los valores por debajo de la diagonal sean 0.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & 0 \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRINGULAR INFERIOR

Una matriz cuadrada es una matriz triangular inferior, cuando los valores por encima de la diagonal sean 0.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Matriz cuadrada (en $M_{mxm}(\mathbb{R})$) con su diagonal compuesta únicamente por 1. Pueden ser de cualquier orden, **pero siempre deben ser cuadradas**.

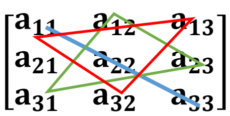
2.1.2. DETERMINANTES

Podemos definir el **determinante de una matriz A** (det(A)) como un **escalar que solo se puede calcular en matrices cuadradas** (mismo número de columnas que de filas) y cuya nomenclatura puede ser escrita de forma que la matriz quede "encerrada" por barras. Puede ser calculado mediante dos métodos diferentes:

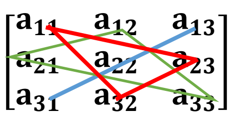
- **Desarrollo de Laplace:** podemos definirlo como la suma de los valores de la primera columna de la matriz, multiplicando cada uno por su adjunto correspondiente. El signo de cada adjunto dependerá de la posición en la que se encuentre, si es posición par ($\mathbf{a_{11}}$ por ejemplo) **tendrá signo positivo ya que** $(-\mathbf{1})^{\mathbf{1+1}}$ **es igual a +1.** Si su **posición es impar** (por ejemplo, a_{21}) **habrá que multiplicar por un -1**, ya que $(-\mathbf{1})^{\mathbf{2+1}}$

$$\mathbf{det\ (A)} = \mathbf{a_{11}}\alpha_{\mathbf{11}} + \ldots . + \mathbf{a_{n1}}\alpha_{\mathbf{n1}}$$

- **Regla de Sarrus** (caso particular del desarrollo de Laplace, cuando A es e dimensión 3x3)**:** la regla de Sarrus se usa en unas condiciones determinadas, que serían que la dimensión de la matriz sea igual a tres (una matriz cuadrada de orden mxm).
  En lo referente al cálculo del determinante, nos tiene que dar el mismo resultado que el desarrollo de Laplace, con la diferencia que este método usa la suma de estas operaciones:



POSITIVOS



NEGATIVOS

Como podemos observar, nos da el mismo resultado por las dos vías. Sin embargo, para matrices cuadradas que no sean de dimensión 3, la regla de Sarrus no sería usable por lo que tendríamos que usar el desarrollo de Laplace en esos casos.

Ahora pasaremos con **las propiedades de los determinantes.**

1. **El determinante de una matriz será 0 cuando….**
    - Tenga dos filas/columnas iguales,
    - Todos los números de una fila/columna sean nulos.
    - Los valores de cualquier fila/columna sean combinación lineal de las otras.

2. **El determinante de una matriz y su traspuesta será el mismo**.

3. El determinante de una matriz con forma triangular (da igual que sea superior o inferior) **tendrá como resultado el valor del producto de la diagonal.**

4. **Si se cambia una fila/columna por otra consecutiva, solo se cambiará el signo del determinante.**

5. Al transformar una fila/columna en una combinación lineal de esta con las otras, **el resultado no cambiará** (en la transformación tiene que haber una multiplicación por un número real para que se cumpla)

6. Un determinante multiplicado por un escalar **puede ser simplificado multiplicando una sola fila/columna por ese mismo escalar (las demás no)**

7. En un determinante, una fila/columna compuesta en su totalidad por sumandos **puede ser dividida por la suma de dos determinantes** (manteniendo las otras filas/columnas igual)

8. El determinante de una multiplicación de matrices cuadradas **es exactamente lo mismo que el producto de los determinantes que lo forman.**

$$|AB| = |A| * |B|$$

2.1.3. APLICACIONES

2.1.3.1. MATRIZ DE PROBABILIDAD

Los elementos de esta matriz son igual a una determinada probabilidad, es decir, cada término interno de la matriz es igual a una probabilidad de que un suceso ocurra (o no)

Por ello, la suma de cada columna debe ser igual a 1 y los valores de esta matriz deben estar entre 0 y 1. A partir de una matriz de probabilidad dada, se pueden obtener procesos que seguirán la siguiente fórmula:

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{k})} = \mathbf{P}^{(\mathbf{k})}\mathbf{V}^{(\mathbf{0})}$$

Donde

- P es la mencionada matriz de probabilidad inicial de un determinado suceso
- $V^{(0)}$un vector inicial del mismo proceso.

Esta matriz $V^{(k)}$ se puede usar para una cosa tan cotidiana como el Código Postal. Básicamente, comprobará la eficacia del uso del Código Postal. Veamos un ejemplo.

Matriz de probabilidad de que una carta recogida en Linares, sea entregada en Jaén. (Ejemplo propio)

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Lin} & \text{Jaén} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Lin} \\ \text{Jaén} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad V^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

Ahora queremos observar cómo irán variando las probabilidades a lo largo de distintos procesos (parecido a la cadena de Markov) y obtener $V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)}$.

$$P\left(V^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.525 \\ 0.475 \end{pmatrix} = V^{(1)}$$

$$P\left(V^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.525 \\ 0.475 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5375 \\ 0.4625 \end{pmatrix} = V^{(2)}$$

$$P\left(V^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5375 \\ 0.4625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53125 \\ 0.46875 \end{pmatrix} = V^{(3)}$$

2.2. ESPACIOS VECTORIALES

Antes de explicar más en profundidad otras partes de los espacios vectoriales, conviene profundizar en la definición más básica de estos:

DEFINICIÓN: siendo K un cuerpo y V un conjunto no vacío, V será un espacio vectorial sobre K si se cumple lo siguiente:

1. Existe en V una operación interna (que será +) **donde (V,+) es un grupo abeliano** que verifica estas propiedades:
   a. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall \mathrm{u,v,w} \in \mathrm{V}$
   b. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \quad \forall \mathrm{u,v} \in \mathrm{V}$
   c. Existe $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ **tal que** $\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v} \quad \forall \mathrm{v} \in \mathrm{V}$
   d. $\forall \mathrm{v} \in \mathrm{V}$, existe $-\mathrm{v}$ tal que $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=(-\mathbf{v})+\mathbf{v}=\mathbf{0}$
2. **Hay una operación externa de K en V que verifica:**
   a. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{au}+\boldsymbol{av}; \quad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{K}, \forall \mathrm{u,v} \in \mathrm{V}$
   b. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{au}+\boldsymbol{bu}; \quad \forall \mathrm{a,b} \in \mathrm{K}, \forall \mathrm{u} \in \mathrm{V}$
   c. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bu})=(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{u}; \quad \forall \mathrm{a,b} \in \mathrm{K}, \forall \mathrm{u} \in \mathrm{V}$
   d. $\mathbf{1}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}; \quad \forall \mathrm{u} \in \mathrm{V}$

Cada elemento del espacio vectorial recibe el nombre de **vector**.

Ejemplo. Podemos considerar que es un espacio vectorial real (los escalares son números reales) el conjunto de las funciones reales que estén definidas en un intervalo determinado de la recta real. Básicamente, de la siguiente forma:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Con el producto por escalares organizado de la siguiente forma:

$$(\mathbf{af})(\mathbf{x})=\mathbf{a}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

Ahora estudiaremos otros conceptos útiles dentro de los espacios vectoriales, como por ejemplo:

- **Dependencia o independencia lineal:** diremos que un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando ninguno de los vectores que lo forman pueden ser escritos como una **combinación lineal de otros**. Es decir, que se cumpla lo siguiente:

$$\mathbf{a_1v_1}+\cdots+\mathbf{a_nv_n}=\mathbf{0} \qquad \textbf{siendo} \qquad \mathbf{a_1}=\mathbf{a_2}=\cdots=\mathbf{a_n}=\mathbf{0}$$

Además, será linealmente dependiente si no es linealmente independiente

SISTEMA DE GENERADORES: En un espacio vectorial V, se dice que una serie de vectores S es un sistema de generadores si los vectores de V son una combinación lineal de los vectores que forman a S.

Ejemplo. La matriz [(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)] es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^3$ ya que al expresar los vectores como una combinación lineal de los vectores del sistema de generadores, tenemos una matriz resultante que es un sistema compatible determinado y esto nos permite expresar cualquier vector respecto el sistema de generadores resultante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = \alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,1,0) = (0, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 0, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 0)$$

$$(0, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, 0, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 => \text{SISTEMA COMP. DET}$$

Con la regla de Cramer se resolvería, y al sustituir las coordenadas (x,y,z) en la solución obtenida podríamos obtener cualquier vector (respecto el sistema de generadores inicial)

2.2.1. BASES

Un determinado subconjunto B, que pertenece a un espacio vectorial V, será una base de ese espacio vectorial si cumple estas condiciones:

1. B es **LINEALMENTE INDEPENDIENTE**
2. **B es un sistema de generadores** de ese espacio vectorial V.

Si un determinado espacio vectorial posee una base finita, lo llamaremos "**espacio vectorial de dimensión finita**". En el caso de la dimensión del espacio vectorial, podemos afirmar que **la dimensión será el número de vectores en cualquier base que componen dicho espacio vectorial**.

BASE CANÓNICA de K^n: se le llama así al conjunto de vectores formados de la manera (1,0,0,…,0),(0,1,0,….,0),….,(0,0,0,….,1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora veremos las coordenadas de un vector respecto a una base, además del cambio de base:

- **Coordenadas de un vector:** siendo V un espacio vectorial y teniendo una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cada vector u ∈ V puede expresarse como una combinación lineal de la forma:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{v}_2 + \cdots \boldsymbol{\alpha}_n\mathbf{v}_n$$

COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

Usaremos las coordenadas para representar el vector (que pertenece a un determinado espacio vectorial) **mediante sus escalares**.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \dots, \mathbf{x}_n)_\mathbf{B}$$

CAMBIO DE BASE

Teniendo dos bases diferentes en un espacio vectorial de dimensión n, queremos relacionar las coordenadas de un vector en ambas bases.

La relación entre las coordenadas de una y otra base depende principalmente de la relación que haya entre las bases en sí. Es por ello que debemos tener información que las relacionen.

Aquí aparecen las ecuaciones de cambio de base (B´ a B), los escalares tienen que ser similares en las dos expresiones de x en la misma base, por tanto tenemos la siguiente expresión:

$$\mathbf{X = PX'}$$

- **X y X´ son las matrices formadas por las coordenadas del vector x en B y B´.**
- **P será la matriz de cambio de base (de B´ a B),** conteniendo en sus columnas las coordenadas de los vectores de B´ según B.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Teniendo una base B´ formada por los polinomios [$\mathbf{x^2 - 2x + 1}$, $\mathbf{2x - 2}$, $\mathbf{2}$] en el espacio vectorial $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$**.** Obtener la matriz cambio de base de B´ a B, teniendo en cuenta que la base B es la base estándar de la forma B= [1, x, x^2]

1. $\mathbf{x^2 - 2x + 1} = \mathbf{(1, -2, 1)_B}$
2. $\mathbf{2x - 2} = \mathbf{(-2, 2, 0)_B}$
3. $\mathbf{2} = \mathbf{(2, 0, 0)_B}$

Nos queda la matriz P de la siguiente manera, esta matriz nos ofrece el cambio de base de B´ a B:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Para conseguir el cambio de base de B a B´, hay que hacer la inversa de P ($\mathbf{P^{-1}}$)

$$\mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$$

2.2.2. SUBESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN: en un espacio vectorial V, un subconjunto no vacío U será un subespacio vectorial si se verifican estas condiciones:

1. El subconjunto no vacío es cerrado para la suma.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{U}$$

2. El subconjunto no vacío es cerrado para el producto por escalares.

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{K}, \quad \mathbf{au} \in \mathbf{U}$$

<u>ECUACIONES CARTESIANAS Y PARAMÉTRICAS DE UN SUBESPACIO</u>

En este apartado tomaremos un espacio vectorial U de un determinado espacio vectorial V, para considerarlos como la solución de un sistema de ecuaciones.

Para ello, **tomaremos una base de U** (justo como hacíamos en la página 12 con las bases) y **calcularemos las coordenadas de cada vector que pertenece a U**. Resumiendo, tendremos los siguientes componentes:

1. **Vectores $\mathbf{u_i}$ según la base B de U**

$$u_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})_B$$

2. **Vector x expresado en combinación lineal de los $\mathbf{u_i}$**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) + \cdots \lambda_r (a_{1r}, a_{2r}, \ldots, a_{nr})$$

3. **Ecuaciones paramétricas de U respecto B** (al igualar coordenadas)

$$\begin{array}{c} x_1 = a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots a_{1r}\lambda_r \\ x_2 = a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots a_{2r}\lambda_r \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots a_{nr}\lambda_r \end{array}$$

Este sistema es homogéneo, y diremos que las ecuaciones de un sistema homogéneo (SI LAS SOLUCIONES COINCIDEN CON EL RESULTADO OBTENIDO) son las ECUACIONES IMPLÍCITAS de U respecto B.

Para obtener el número de ecuaciones implícitas, seguiremos la siguiente fórmula:

$$\mathbf{n^{o}\ ecuaciones\ implícitas = dim\,V - dim\,U}$$

Se obtienen de las ecuaciones paramétricas, eliminando parámetros.

2.2.3. APLICACIONES

2.2.3.1. MODELO DE CONTABILIDAD AGREGATIVA

Podemos definir el modelo de contabilidad agregativa o contabilidad matricial como el modelo contable que organiza la información de la contabilidad a través de la inscripción de los valores asignados a cada hecho contable. También se dispondrá del Debe (filas) y del Haber (columnas) con los que poder comprobar el balance.

La principal ventaja de este modelo es que puede representar la relación de dos cuentas en una sola anotación. Veamos un ejemplo.

1. **Aplicar la inscripción a los elementos que vayamos a estudiar del plan de cuentas**. En nuestro caso usaremos estas cuentas:

1. Tabla de cuentas

Caja	CJ
Capital	C
Maquinaria	M
Inventario	I
Proveedores	PV
Ingresos	IG
Costes y gastos	CG
Pérdidas y ganancias	PyG
Resultado del ejercicio	Rdo

Fuente: Elaboración propia

2. **Insertamos los asientos**, de la siguiente forma:

	CJ	**C**	**M**	**I**	**PV**	**IG**	**CG**
CJ	0						
C		0					
M			0				
I				0			
PV					0		
IG						0	
CG							0

Fuente: Elaboración propia

Empecemos por el primer asiento o suceso que ocurre en la empresa.

El dueño del negocio inyecta 200€ en maquinaria y 100€ en forma de efectivo.

Maquinaria: Serían 200€ en el Debe de la cuenta "M" y 200€ en el Haber de la cuenta "C"

Efectivo: Serían 100€ en el Debe de la cuenta "CJ" y 100€ en el Haber de la cuenta "C"

2 Primer asiento

	CJ	C	M	I	PV	IG	CG
CJ	0						
C	100€	0					
M		200€	0				
I				0			
PV					0		
IG						0	
CG							0

Fuente: Elaboración propia

Se compran 250Kg de producto por 400€, pero es a crédito

Serían 400€ en el Debe de la cuenta "I" y 400€ en el Haber de la cuenta "PV"

3 Segundo asiento

	CJ	C	M	I	PV	IG	CG
CJ	0						
C	100€	0					
M		200€	0				
I				0			
PV				400€	0		
IG						0	
CG							0

Fuente: Elaboración propia

La empresa paga los salarios de sus trabajadores, son 20€ en concepto de sueldo.

Serían 20€ en el Debe de la cuenta “CG” y 20€ en el Haber de la cuenta “CJ”

4 Tercer asiento

	CJ	C	M	I	PV	IG	CG
CJ	0						20€
C	100€	0					
M		200€	0				
I				0			
PV				400€	0		
IG						0	
CG							0

Fuente: Elaboración propia

La empresa paga una serie de servicios públicos, son 3€.

Serían 3€ en el Debe de la cuenta “CG” y 3€ en el Haber de la cuenta “CJ”

5 Cuarto asiento

	CJ	C	M	I	PV	0	CG
CJ	0						20€+3€
C	100€	0					
M		200€	0				
I				0			
PV				400€	0		
0							
CG							0

Fuente: Elaboración propia

<u>Se retiran 20€ del capital</u>

Serían 20€ en el Debe de la cuenta "C" y 20€ en el Haber de la cuenta "CJ"

6 Quinto asiento

	CJ	C	M	I	PV	IG	CG
CJ	0	20€					20€+3€
C	100€	0					
M		200€	0				
I				0			
PV				400€	0		
IG						0	
CG							0

Fuente: Elaboración propia

<u>Se venden 300kg de mercancías valoradas en 500€</u>

<u>Efectivo</u>: Serían 500€ en el Debe de la cuenta "CJ" y 500€ en el Haber de la cuenta "I"

<u>Mercancía vendida</u>: Serían 150€ en el Debe de la cuenta "CG" y 150€ en el Haber de la cuenta "I" (150€ es el coste del transporte de dicha mercancía)

7 Sexto asiento

	CJ	C	M	I	PV	IG	CG
CJ	0	20€					20€+3€
C	100€	0					
M		200€	0				
I				0			150€
PV				400€	0		
IG	500€					0	
CG							0

Fuente: Elaboración propia

3. Una vez insertados los asientos, **procedemos a realizar el balance de comprobación.**

8 Balance de comprobación

	CJ	C	M	I	PV	IG	CG	Vector H
CJ	0	20€					23€	43
C	100€	0						100
M		200€	0					200
I				0			150€	150
PV				400€	0			400
IG	500€					0		500
CG							0	0
Vector D	600	220	0	400	0	0	173	**1393**

Fuente: Elaboración propia

Aquí ya se puede observar la interacción de los espacios vectoriales, ya que **tenemos un conjunto de vectores** (las cuentas) que **pertenecen a dos espacios vectoriales que son el vector D** (Debe) y **el vector H** (Haber). En nuestro caso ambos cuentan con **seis dimensiones** (las 7 cuentas usadas)

Ahora procederemos con los ajustes (en nuestro caso no hay ya que no tenemos en cuenta la amortización de la maquinaria) y finalmente, con el cierre.

4. Cierre del proceso contable.

Como ingresos tenemos 500€ y como costes y gastos tenemos 173€. La diferencia es de 327€. Por tanto, nuestro resultado será de 173€. La tabla para finalizar el cierre quedará de la siguiente manera:

9 Asiento de cierre

	CJ	C	M	I	PV	IG	CG	PyG	Rdo	Vector H
CJ	0	20€					23€			43
C	100€	0								100
M		200€	0							200
I				0			150€			150
PV				400€	0					400
IG	500€					0				500
CG							0	**173**		173
PyG						**500€**		**0**		500
Rdo								**327**	**0**	327
Vector D	600	220	0	400	0	500	173	500	0	

Fuente: Elaboración propia

Por último, calculamos el vector de saldos (la denotaremos como S, y no es más que la diferencia entre el Vector D-Vector H) y con ella ya obtendremos el conjunto de los tres vectores con los que poder relacionar matemáticamente todos los vectores:

10 Vector saldos

Cuentas	Vector D (Debe)	Vector H (Haber)	Vector S (Saldo)
Caja	600	43	**557**
Capital	220	100	120
Maquinaria	0	200	(200)
Inventario	400	150	250
Proveedores	0	400	(400)
Ingresos	500	500	0
Costes y gastos	173	173	0
Pérdidas y ganancias	500	500	0
Resultado del ejercicio	0	327	(327)
SUMA	**2393**	**2393**	**0**

Fuente: Elaboración propia

2.3. CONCEPTOS BÁSICOS DE APLICACIONES LINEALES

APLICACIÓN LINEAL: Teniendo los espacios vectoriales V y V´ de una determinada aplicación $f: V \rightarrow V'$, diremos que es aplicación lineal si se verifica:

1. $\mathbf{f(u+v) = f(u) + f(v)}$, $\forall u, v \in V$
2. $\mathbf{f(au) = af(u)}$, $\forall a \in K$, $\forall u \in V$

Si $V = V'$, entendemos que es un **ENDOMORFISMO**.

MATRIZ ASOCIADA: Sea una aplicación lineal $f: V \rightarrow V'$ con una base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en V y una base $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, denotaremos a las coordenadas de $f(x)$ por $f(x) = (y_1, \dots, y_m)_{B'}$ obteniendo (de forma matricial):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Donde la matriz asociada de $f$respecto de las bases B y B´ será la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Teniendo la siguiente matriz A (de orden mxn):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \cdots & \mathbf{a_{mn}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{B,B'}}(f)$$

Podemos afirmar que **A será la matriz asociada** (la definición anterior) **a las respectivas bases canónicas**, respecto a una aplicación lineal.

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{m}}; \quad \mathbf{f(x) = AX}$$

Donde X **será la matriz columna que incluye al vector x** (y sus coordenadas)

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \cdots & \mathbf{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}x_1} + & \cdots & +\mathbf{a_{1n}x_n} \\ \mathbf{a_{21}x_1} + & \cdots & +\mathbf{a_{2n}x_n} \\ & \vdots & \\ \mathbf{a_{m1}x_1} + & \cdots & +\mathbf{a_{mn}x_n} \end{pmatrix}$$

AX=0 si se cumple que x es ortogonal a cada fila de A.

2.4. DIAGONALIZACIÓN

2.4.1. DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

AUTOVALORES: teniendo una matriz A que es cuadrada, el escalar $\lambda \in C$ diremos que es un autovalor de la matriz A si hay un determinado vector v $\in \mathbb{C}^m$(siendo v distinto de 0) que cumpla Av=λv.

También podremos afirmar que "v" será el **AUTOVECTOR** de A (que está asociado al autovalor λ)

$$\mathbf{V_\lambda = \{u \in V | f(u) = \lambda\, u\}}$$

Donde $\mathbf{V_\lambda}$ **son todos los autovectores asociados a** $\boldsymbol{\lambda}$**.** Al subespacio V_λ se le denomina subespacio propio de λ.

Para que un escalar λ **se considere autovalor, se debe cumplir la siguiente igualdad:**

$$\mathbf{det(A - \lambda\, I) = 0}$$

$$\mathbf{det((A - \lambda\, I)} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Hay varios conceptos asociados:

- **Multiplicidad algebraica:** teniendo n autovalores (λ_1,λ_2, ... ,λ_r), la multiplicidad algebraica es el mayor exponente α_i $((\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i})$ que hay en la descomposición de p(λ).
- **Multiplicidad geométrica:** es la dimensión d_i del subespacio propio V_{λ_i}:

$$\mathbf{d_i = dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda_i\, I)}$$

Por otra parte, el endomorfismo $(V = V')$, $f: V \rightarrow V$ es **diagonalizable si hay una base de V con respecto a la cual la matriz relacionada a f sea diagonal**.

MATRICES SEMEJANTES: entendemos la semejanza entre dos matrices cuando **dos matrices cuadradas se relacionan mediante la fórmula** $\mathbf{B = P^{-1}AP}$. A y B serán semejantes y P una matriz no singular. Son matrices que denotan la misma transformación lineal pero respecto de diferentes bases.

Por último, una matriz A_{mxm} es **diagonalizable si hay una matriz D semejante a A.**

2.4.2. APLICACIONES

2.4.2.1. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES Y EL ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

La principal función del Análisis de Componentes Principales (ACP o PCA) es disminuir el número de dimensiones en un determinado número de variables, esta disminución de dimensiones debe tratar de mantener la mayor información posible. El ACP tiene muchas utilidades, entre las que se encuentran:

- **Transforma las variables iniciales** (que están relacionadas entre ellas) **en variables no relacionadas**, permitiendo un análisis más fácil ya que se pueden interpretar mejor los datos.
- **Elimina información que explica lo mismo en el análisis**, es decir, elimina información que se solapa con otra a la hora de explicar un tipo de información.
- **Por último, también reconoce otras posibles variables que no se ven tan claras en la situación inicial.**

El conjunto resultante de esa reducción de la dimensión serán los llamados “Componentes Principales (PC)”.

En el ACP, se puede obtener la matriz de componentes principales considerando la descomposición espectral de la matriz de covarianzas. Que sigue esta metodología:

$$\mathbf{S} = \mathbf{CDC'}$$

Donde:

- $\mathbf{D} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_p})$ con λ_i siendo los autovalores de S.
- **C siendo la matriz ortogonal (y C´ su traspuesta),** sus columnas serán los autovectores a_i normalizados.

A partir de aquí, vamos a considerar otro “método” para calcular dicha matriz de componentes principales, usaremos la “Descomposición en Valores Singulares (DVS)”. Hay que decir que están muy relacionados y hay muy pocas diferencias entre ellos:

1. El hacer la DVS **puede mejorar más la precisión** que la descomposición de la matriz de covarianza.
2. La DVS permite trabajar con **matrices de datos no cuadradas.**

Un detalle importante: SE PUEDE HACER EL ACP CON LA DVS O CON LA DESCOMPOSICIÓN DE LA MATRIZ DE COVARIANZAS, DE IGUAL MODO QUE HAY MUCHOS MÁS MÉTODOS.

DEFINICIÓN: La descomposición en valores singulares puede ser definida como una **factorización de la siguiente forma:** $\mathbf{A = U\sum V^t}$. Partimos desde $\mathbf{A \in M_{mxn}}$

Donde $\mathbf{U} \in \boldsymbol{M_{mxm}}(\mathbb{R})$ **y** $\mathbf{V} \in \boldsymbol{M_{nxn}}(\mathbb{R})$ son **ORTOGONALES.**

- $\mathbf{U}$, son las columnas resultantes de $\mathbf{Av_i/\sigma_i}$
- $\sum$**,** matriz diagonal mxn, tiene el mismo tamaño que la matriz A.
- **V,** vectores propios en columnas de cada autovector.

Ejemplo. Descomponer en valores singulares la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = U\sum V^t$

1. **En primer lugar, tenemos que hallar** $\sum$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{81} \end{pmatrix} = \mathbf{B}; P(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 \\ 0 & 81-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{9-\lambda})(\mathbf{81-\lambda})$$

$$(9-\lambda)(81-\lambda) = 0 \quad \begin{matrix} \lambda = 9 \\ \lambda = 81 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sigma_1 = \sqrt{9}; & \sigma_1 = 9 \\ \sigma_2 = \sqrt{81}; & \sigma_2 = 3 \end{matrix} \qquad \sum = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

2. **En segundo lugar, tenemos que hallar V**

$$\mathbf{V_\lambda} = [(\mathbf{B - \lambda I})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

$$V_9 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 72 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]; \qquad 72y = 0; x = \alpha \qquad y = 0; \quad \mathbf{v_1} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{0})$$

$$V_{81} = \left[\begin{pmatrix} -72 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]; \; -72x = 0; \; x = 0 \qquad y = \alpha; \quad \mathbf{v_2} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

3. **Por último lugar, tenemos que hallar U**

$$\mathbf{U} = {}^{(\mathbf{A} * \mathbf{V_1})}/_{\boldsymbol{\sigma_1}}$$

$\mathrm{U_1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$; $\quad \mathrm{U_1} = (\frac{0}{9}, \frac{9}{9}, \frac{0}{9})$; $\quad \mathbf{U_1} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$

$\mathrm{U_2} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$; $\quad \mathrm{U_2} = (\frac{0}{3}, \frac{0}{3}, \frac{3}{3})$; $\quad \mathbf{U_2} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

$$\mathbf{U_1} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) \qquad \mathbf{U_2} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

$$\begin{bmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{bmatrix} \quad => \begin{matrix} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \quad => \quad \mathbf{U_3} \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ya que} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ **LINEALMENTE INDEPENDIENTES**

<u>COMPROBACIÓN</u>

$$A = U\sum V^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

<u>PROPIEDADES</u>

1. **La cantidad de valores singulares de A viene implícito en el rango de A**, es decir, si es distinto de 0 será el número de valores singulares.
2. Cada componente de **la diagonal $\boldsymbol{\sigma_i}$** cumple $\mathbf{Au_i} = \boldsymbol{\sigma_i}\mathbf{v_i}, \mathbf{A^t v_i} = \boldsymbol{\sigma_i}\mathbf{u_i}$
   a. $\mathbf{u_i}$ = columna U asociada a σ_i
   b. $\mathbf{v_i}$ = columna V asociada a σ_i

La particularidad del DVS es que trata de “centralizar” los datos para después rotarlos, y conseguir que el eje que tenga mayor varianza esté alineado con el eje principal.

Ahora vayamos con los cálculos, la principal diferencia a la hora de calcular todo es que el método más usual trabaja con la matriz de varianzas y covarianzas, calculando en ellas los valores y vectores propios, **mientras que usando la DVS usaremos la matriz de datos X como objetivo de los cálculos.**

Para ver con más claridad el proceso, podemos dividirlo en pasos:

1. En primer lugar, partimos de una matriz de datos. **Las columnas pueden ser el número de elementos y las filas las diferentes características a estudiar**, por ejemplo, en las columnas podemos ubicar los diferentes negocios de una multinacional y en las filas las características de estos (número de trabajadores por negocio, dinero que ingresa cada negocio…)

   Esta matriz puede ser insertada en R para no tener que hacer los cálculos a mano, por lo que nos facilitará mucho la labor de cálculo.

2. **En la matriz insertada, calcularemos la DVS**. También podemos calcular la matriz de covarianzas, S, y sus valores y vectores propios asociados para poder comparar con los resultados de la DVS.
3. **Graficar la solución con la que obtendremos una interpretación al problema planteado**.

Ahora vayamos con el ejemplo.

Ejemplo. Tenemos una serie de datos de un determinado sector sobre cuatro empresas respecto a tres variables ficticias (bien podrían ser características del mercado como el tipo de facturación que tienen al año o la relación de empleados contratados/despedidos,etc…)

11 Datos del ejemplo de la DVS

	Ficticia 1	Ficticia 2	Ficticia 3
Empresa 1	5	-1	-2
Empresa 2	4	4	-1
Empresa 3	-2	5	-3
Empresa 4	-7	-8	6

Fuente: Elaboración propia

Como mencionamos en las características de la DVS, **permite trabajar con matrices que no son cuadradas** (este caso es un matriz de orden 4x3)

Una vez tenemos los datos, procedemos a ejecutarlos en R y a descomponer en valores singulares la matriz de datos. Nos ofrece la siguiente descomposición:

MATRIZ ∑

$d

[1] 14.195437 6.591902 2.244191

MATRIZ U

$u

```
            [,1]        [,2]       [,3]
[1,] -0.2223606  0.655525173 -0.5204253
[2,] -0.3831125  0.100132194  0.7701937
[3,] -0.2542561 -0.748470872 -0.3537586
[4,]  0.8597292 -0.007186495  0.1039903
```

MATRIZ V

$v

```
           [,1]       [,2]      [,3]
[1,] -0.5743990  0.7927002 0.2041865
[2,] -0.6663553 -0.5976817 0.4458108
[3,]  0.4754329  0.1200126 0.8715277
```

Podemos comparar con los obtenidos al analizar la matriz de covarianzas S, para ello la calcularemos (junto a sus valores y vectores propios) también para poder comparar:

Matriz de covarianzas= $\begin{pmatrix} \mathbf{94} & \mathbf{57} & \mathbf{-50} \\ \mathbf{57} & \mathbf{106} & \mathbf{-65} \\ \mathbf{-50} & \mathbf{-65} & \mathbf{50} \end{pmatrix} = X^tX$ (X es la matriz de datos)

Valores propios = **201.510439   43.453169   5.036393**

Vectores propios = $\begin{pmatrix} \mathbf{0.5744} & \mathbf{0.7927} & \mathbf{0.2042} \\ \mathbf{0.666} & \mathbf{-0.598} & \mathbf{0.4458} \\ \mathbf{-0.4754} & \mathbf{0.12} & \mathbf{0.8715} \end{pmatrix}$

Ahora podremos comparar los valores propios con los valores singulares al cuadrado (sería la "d" obtenida en la svd al cuadrado)

VALORES SINGULARES AL CUADRADO

$$(14.195437 \quad 6.591902 \quad 2.24419)^2 = \mathbf{201.510439\ 43.453169\ \ 5.036393}$$

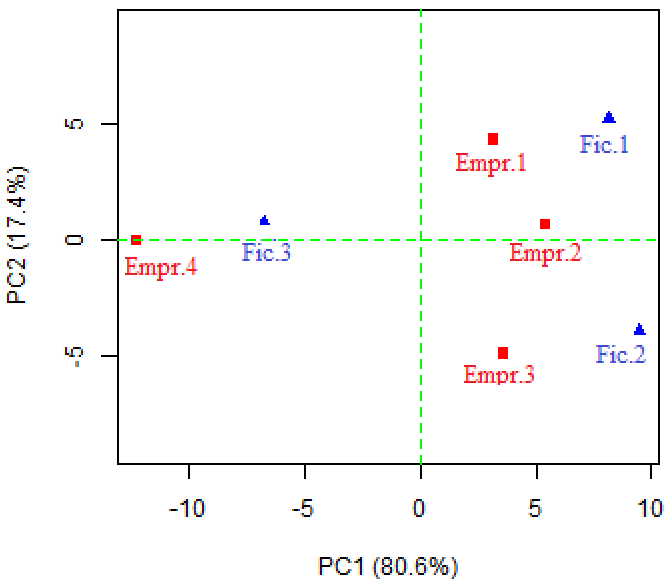
TANTO LOS VALORES SINGULARES AL CUADRADO COMO LOS VALORES PROPIOS SON IGUALES (también podemos confirmar que tanto los vectores propios como los vectores singulares SON IGUALES)

Por último, podemos graficar las coordenadas sacándolas desde el procedimiento de la DVS, tendríamos que multiplicar la matriz U por la matriz ∑.

$$\mathbf{XV = U\sum V^T V = U\sum}$$

El gráfico sería el siguiente.

12 Gráfica del ejemplo de la DVS



Fuente: Elaboración propia

INTERPRETACIÓN: Para concluir, podemos sacar en claro varias cosas:

- **Las empresas 1 y 2 tienen bastante relación con la primera variable ficticia**, la 3 y la 4 no tienen mucha relación con ella ya que están bastante alejadas.
- **Las empresas 2 y 3 tienen bastante relación con la variable ficticia 2,** la 2 comparte relación con la variable ficticia 1 y 2 (aunque está un poco más cerca de la 1)

- **La empresa 4 es la más alejada de todas, y presenta una relación muy evidente con la variable ficticia 3.** Esta empresa denota un contraste respecto las otras, por lo que puede tener unas características totalmente opuestas.

2.4.2.2. CADENA DE MARKOV

DEFINICIÓN: Se puede definir la cadena de Markov como el **proceso probabilístico que establece una gran dependencia entre un suceso y su antecesor**. Esto permite realizar una probabilidad de posible suceso futuro, siendo siempre un proceso estocástico (o aleatorio), de ahí su parecido con las matrices de probabilidad vistas en el apartado de las matrices.

Tiene un gran ámbito de aplicación ya que permite "pronosticar" en estudios financieros o económicos. Para comprender la relación que hay entre la cadena de Markov y el álgebra lineal, conviene clarificar una serie de conceptos relacionados con la diagonalización:

MATRIZ DIAGONALIZABLE: Una matriz $A_{nxn} \in M_n(\mathbb{R})$ (cuadrada) es diagonalizable cuando se cumple la existencia de una determinada matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ invertible que cumpla la siguiente fórmula (**D es una matriz diagonal**):

$$\mathbf{P^{-1}AP = D} \text{ ó } \mathbf{A = PDP^{-1}}$$

Para que una matriz sea diagonalizable, debe cumplir los siguientes requisitos:

1. No será diagonalizable **cuando tenga algún valor propio complejo**.
2. Será diagonalizable **cuando tenga TODOS los valores propios reales**, y sean **diferentes**.

Ejemplo. Determinar si la siguiente matriz es diagonalizable $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = P(\lambda)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \qquad \begin{matrix} \boldsymbol{\lambda_1 = -1} \\ \boldsymbol{\lambda_2 = 3} \end{matrix}$$

Las raíces son REALES y DISTINTAS, por tanto, A es DIAGONALIZABLE. Si las raíces hubieran sido iguales, habría que comparar si la multiplicidad algebraica de cada $P(\lambda)$ es igual que la MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA.

Tras ver cómo funciona la diagonalización, podemos pasar a estudiar cómo se ejecuta la cadena de Markov. Para ello veremos un ejemplo práctico, donde la cadena de Markov usará la fórmula $A = PDP^{-1}$ para llegar a la predicción en un determinado instante de tiempo.

Situémonos en una empresa que tiene problemas de liquidez, la probabilidad de que una empresa SI vaya a despedir a los trabajadores más antiguos al año siguiente es 65%, mientras que la probabilidad de que NO despida a los trabajadores más nuevos es de 85% (los nuevos están más preparados y conocen más idiomas)

Determinar el porcentaje de trabajadores nuevos y antiguos despedidos a la larga.

Definimos la matriz de transición: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.65} & \mathbf{0.15} \\ \mathbf{0.35} & \mathbf{0.85} \end{pmatrix}$, cuyos valores propios son $\begin{matrix} \boldsymbol{\lambda_1 = 1} \\ \boldsymbol{\lambda_2 = 1/2} \end{matrix}$

y sus vectores propios son $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Para conocer la situación en un determinado año i, lo expresaremos con un vector de esta manera $\mathbf{Xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{xi} \\ \mathbf{yi} \end{pmatrix}$, si queremos conocer la situación en el año siguiente pues cambiaría la matriz de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} \mathbf{xi+1} \\ \mathbf{yi+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} * \begin{pmatrix} \mathbf{xi} \\ \mathbf{yi} \end{pmatrix}$

En nuestro caso, para conocer la relación de trabajadores antiguos despedidos y trabajados nuevos NO despedidos EN UN DETERMINADO AÑO:

$$\mathbf{X_k} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.65} & \mathbf{0.15} \\ \mathbf{0.35} & \mathbf{0.85} \end{pmatrix}^{\mathbf{k}} * \begin{pmatrix} \mathbf{x_0} \\ \mathbf{y_0} \end{pmatrix}$$

A partir de aquí usaremos DIAGONALIZACIÓN (con los vectores y autovalores anteriores):

$$A^k = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{\mathbf{k}} * \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{\boldsymbol{k\to\infty}} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.3} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.7} & \mathbf{0.7} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\infty = \lim_{k\to\infty} A^k * \mathbf{X_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.3} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.7} & \mathbf{0.7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_0} \\ \mathbf{y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.3x_0} & \mathbf{0.3y_0} \\ \mathbf{0.7x_0} & \mathbf{0.7y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.7} \end{pmatrix}$$

A la larga, el 30% de los trabajadores despedidos serán trabajadores NUEVOS y el 70% serán trabajadores ANTIGUOS.

2.5. INVERSAS GENERALIZADAS. MÍNIMOS CUADRADOS

2.5.1. MATRICES INVERSAS GENERALIZADAS

A será de **RANGO PLENO POR FILAS** si su rango es igual a m (número de filas). Respectivamente, A será de **RANGO PLENO POR COLUMNAS** si su rango es igual a n (número de columnas)

- ✓ Si $\mathbf{rg(A) = m}$, RANGO PLENO POR FILAS
- ✓ Si $\mathbf{rg(A) = n}$, RANGO PLENO POR COLUMNAS

INVERSAS LATERALES de una matriz $A \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{mxn}}(\mathbf{K})$

Únicamente habría que multiplicar las matrices A y B, si el resultado es una matriz identidad de **orden m**, **B ES UNA INVERSA A LA DERECHA DE A.**

Con la inversa por la izquierda actuamos igual. Habría que multiplicar las matrices A y C, y si el resultado es una matriz identidad de **orden n (**<u>no de orden m</u>**)**, **C ES UNA INVERSA A LA IZQUIERDA DE A.**

Inversa a derecha de A: sería una matriz $\mathbf{B} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{nxm}}(\mathbf{K})$ que cumpla $\mathbf{AB = I_m}$

¿Cómo se calcula? Una inversa de "A" A LA DERECHA será $A^R = A^t(AA^t)^{-1}$, se usaría únicamente si A es de rango pleno por filas.

Inversa a izquierda de A: sería una matriz $\mathbf{C} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{nxm}}(\mathbf{K})$ que cumpla $\mathbf{CA = I_n}$

¿Cómo se calcula? Una inversa de "A" A LA IZQUIERDA será $A^L = (AA^t)^{-1}A^t$, se usaría únicamente si A es de rango pleno por columnas.

INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE: teniendo una matriz $\mathbf{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{mxn}}(\mathbf{K})$**,** una matriz X será la inversa generalizada de Moore-Penrose. Tal que:

1. $\mathbf{AXA = A}$
2. $\mathbf{XAX = X}$
3. AX y XA serán **SIMÉTRICAS**

¿Cómo se calcula? A se puede descomponer como la multiplicación de EF, donde tenemos E de rango pleno por columnas y F de rango pleno por filas. Partiendo de esto, tenemos la fórmula $\mathbf{A^+ = F^R E^L}$ **que es la que se usará para calcular la inversa generalizada.**

2.5.2. SISTEMAS DE ECUACIONES. MÍNIMOS CUADRADOS

Teniendo un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{gathered}\mathbf{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \mathbf{a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m}\end{gathered}$$

Que también puede ser interpretado matricialmente:

$$\mathbf{A * X = B}$$

Donde A es la **matriz de coeficientes**, X la **matriz incógnita** y B la **matriz de los términos independientes**.

Las soluciones mínimo cuadráticas de AX=B, son las soluciones del sistema compatible $\mathbf{A^tAX = A^tB}$.

- ✓ **Hay otra alternativa si A fuese de rango pleno por COLUMNAS**, ya que existiría una sola solución mínimo cuadrática que viene proporcionada por $\mathbf{X = A^LB}$.

- ✓ **En el caso de que el rango de A fuese pleno por FILAS**, el sistema será compatible y la solución viene dada por $\mathbf{X = A^RB}$.

La solución mínimo-cuadrática de norma mínima vendrá dada por la igualdad siguiente, sin importar si el sistema $AX = B$ es compatible o incompatible.

$$\mathbf{X = A^+B}$$

Básicamente, para calcular la recta que mejor aproxima un conjunto de datos por mínimos cuadrados tendremos que seguir los siguientes pasos (se seguirá el método de los mínimos cuadrados)

1º PASO: El principal problema es **ajustar la recta (y=ax+b) a los datos**. En este primer paso hay que encontrar el sistema de ecuaciones lineales.

Tendremos que representar las coordenadas (o puntos, en definitiva los valores que toman las variables x e y) de las variables x e y en forma de ecuación:

$$\begin{gathered}\mathbf{ax_1 + b = y_1}\\ \mathbf{ax_2 + b = y_2}\\ \vdots\\ \mathbf{ax_n + b = y_n}\end{gathered}$$

Donde, por ejemplo, $\boldsymbol{x_1}$ será el primer valor de la x e $\boldsymbol{y_1}$ será el primer valor de y (y así con todos los valores de x e y hasta n)

2º PASO: El sistema de ecuaciones buscado tendrá que ser **expresado matricialmente**. Para ello seguiremos la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{1} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{x_n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y_n} \end{pmatrix}$$

Que será igual a la expresión matricial que hemos mencionado en la teoría: **AX=B**

3º PASO: En este paso hay que **observar el rango de la matriz A** (la matriz de coeficiente creada en el paso anterior), aunque siempre es de **rango pleno por columnas**.

Recordando la teoría, podemos deducir cuando es pleno por columnas y por filas:

- **COLUMNAS:** Cuya solución vendrá dada por:

$$\mathbf{X = A^L B} \qquad \mathbf{A^L = (A^t A)^{-1} A^t}$$

4º PASO: Obtener los valores a,b de la recta y=ax+b usando la fórmula $A^L B$.

Ejemplo. **Calcular la recta que más se ajusta a los siguientes datos, por el método de mínimos cuadrados.**

x	0	1	2
y	1	0	-3

(En el apartado 5 está realizado este mismo ejercicio con Mathematica)

La recta que más se ajusta a los datos sigue la ecuación de una recta común: y=ax+b

Por ello, en el ejemplo buscaremos la manera de determinar la solución mínimo cuadrática del sistema de ecuaciones de los datos dispuestos. Dicho sistema será de la forma siguiente:

$$\begin{gathered}\mathbf{0a+b=1}\\ \mathbf{1a+b=0}\\ \mathbf{2a+b=-3}\end{gathered}$$

Matricialmente será:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{-3}\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{AX=B}$$

Ahora veremos si es rango pleno por columnas o por filas.

El rango de la matriz A anterior es 2, tenemos 3 filas y 2 columnas. Por tanto:

$$\mathbf{rg(A) = n^{o}columnas}$$

Aplicamos la fórmula para el rango pleno por columnas: $X = A^{L}B$

$$A^{L} = (A^{t}A)^{-1}A^{t} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 5/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{1/2}\\ \mathbf{5/6} & \mathbf{1/3} & \mathbf{-1/6}\end{pmatrix}$$

$$X = A^{L}B;\quad \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 1/2\\ 5/6 & 1/3 & -1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\ \mathbf{4/3}\end{pmatrix}$$

La recta buscada es $\boldsymbol{y = -2x + \frac{4}{3}}$

2.5.3. APLICACIONES

2.5.3.1. MÍNIMOS CUADRADOS EN LOS M. LINEALES

Este apartado tratará sobre el método de los mínimos adaptado a un determinado conjunto de datos (puede aplicarse en regresión o cualquier tipo de análisis que grafique según un determinado conjunto de datos), **esta parte tiene un gran papel ya que en estadística se usa frecuentemente**. Podemos tomar como ejemplo el QQPlot, que usamos en cualquier análisis.

Este método tiene como objetivo optimizar una función a los datos elegidos, siempre teniendo en cuenta el criterio de mínimo error cuadrático.

A partir de la teoría aplicada anteriormente, se **aplicará a un conjunto de datos para observar cómo se aproxima** y relaciona el comportamiento de dicha función continua a los datos.

En el caso general de mínimo cuadrados, se ha de cumplir $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ **pero en el caso de la regresión lineal, estaremos hablando de $\mathbf{X\beta} = \mathbf{y}$**. Donde:

1. **X** = matriz de diseño, vendría a cumplir la función de "A"
2. **β** = el vector de los parámetros del modelo
3. **y** = el vector que observamos, o "b" en el caso general.

La recta funcionará de manera que por cada punto de la recta que observemos (el cual tiene una coordenada "x" y otra "y") habrá un punto en la línea creada. Si presuponemos que todos los puntos estarán en la misma línea tendremos:

$$\boldsymbol{\beta_0 + \beta_1 x_1 = y_1}$$

$$\boldsymbol{\beta_0 + \beta_1 x_2 = y_1}$$

$$\boldsymbol{\beta_0 + \beta_1 x_n = y_n}$$

De forma matricial, se organizará de esta manera:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x_1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{x_2} \\ \dots. & \dots. \\ \mathbf{1} & \mathbf{x_n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_0} \\ \boldsymbol{\beta_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \dots. \\ \mathbf{y_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Obtener el mejor ajuste por el método de mínimos cuadrados, para los datos siguientes. Los datos provienen de un estudio realizado donde se relaciona la antiguedad de una serie de empresas con el gasto en personal (en miles de €) que ejercen al año:

13 Datos del ejemplo de mínimos cuadrados

Antigüedad de la empresa (en años)	Gasto en personal (en miles de €)
4.5	619
4.5	1049
4.5	1033
4	495
4	723
4	681
5	890
5	1522
5.5	987
5	1194
0.5	163
0.5	182
6	764
6	1373
1	978
1	466
1	549

Fuente: Elaboración propia

Una vez tenemos los datos, calculamos los coeficientes de la recta en R:

```
Intercept        X
323.6223  131.7165
```

Obtenemos que nuestra recta ajustada a los datos es y= 323,6223+131,7165x (x es años de antigüedad de la empresa. A partir de aquí podemos interpretar los coeficientes como en regresión ya que prácticamente es un modelo de regresión lineal simple (2 variables)

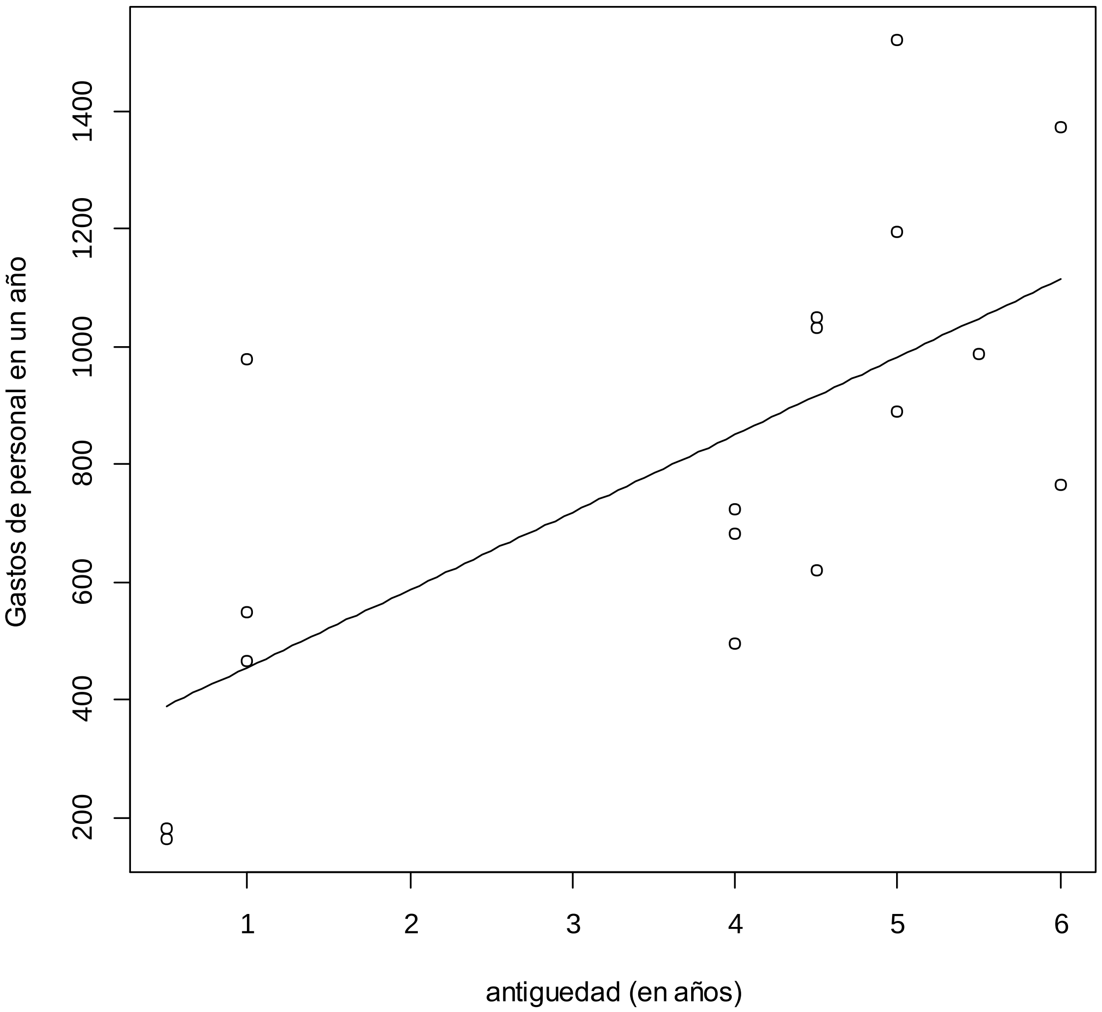
Por tanto, nuestros coeficientes son:

$$\boldsymbol{\beta_0 = 323,6223}$$
$$\boldsymbol{\beta_1 = 131,7165}$$

Podemos interpretarlo como que por cada año adicional, el gasto en personal al año aumenta en 131.716,7€.

Para terminar, podemos observar la recta gráficamente junto con los puntos para ver que si ajusta correctamente el modelo

14 Gráfica del ejemplo de mínimos cuadrados



Fuente: Elaboración propia

En este gráfico ya podemos observar el resultado final del método de mínimos cuadrados, donde finalmente hemos obtenido la recta que más se ajustaba a los datos que teníamos disponibles (siempre tratando de ajustarse a los datos sin lograr un error excesivo)

Se deja entrever claramente que el método de mínimo cuadrados tiene muchas aplicaciones en regresión lineal, ya que tanto para los gráficos como para los coeficientes es necesario este método.

3. HERRAMIENTAS DE COMPUTACIÓN QUE FACILITAN LA REALIZACIÓN DE ESTAS APLICACIONES ALGEBRAICAS EN LA ESTADÍSTICA

En este apartado se verá **el software relacionado a varias técnicas estadísticas donde el álgebra es bastante influyente**, para poder observar que **la dificultad asociada a cada análisis se reduce considerablemente** a la hora de realizar los cálculos.

Los análisis a ver serán los siguientes:

3.1. CADENA DE MARKOV (R)

Para las cadenas de Markov, pretendemos observar cómo puede acortar el software R la realización de cálculos. Para ello usaremos los comandos que vienen en el anexo, los aplicaremos a un ejemplo, donde se ve más fácil:

1. Usaremos el paquete "**markovchain**", y tenemos matriz de transición siguiente

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

2. Tras insertar la matriz en R y meter la cadena de markov (disponible en el ANEXO), podemos ver el resumen de la cadena de Markov insertada:

Cadena 1

A 3 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:

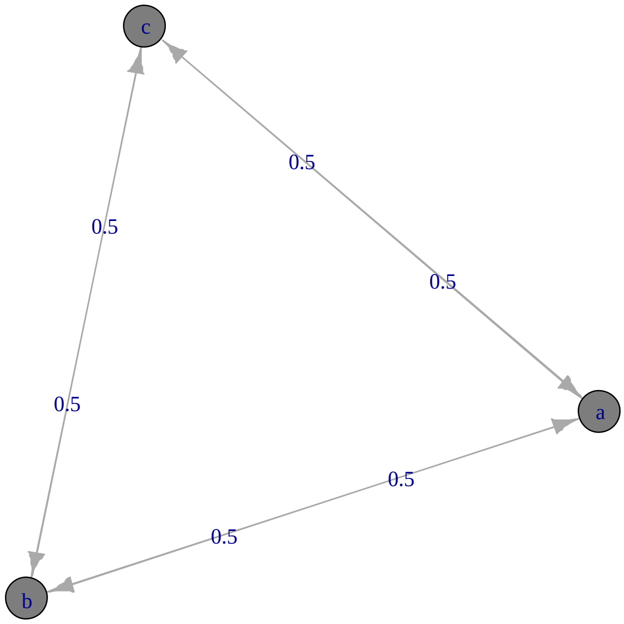
a, b, c

The transition matrix (by rows) is defined as follows:

	a	b	c
a	0	0.5	0.5
b	0.5	0	0.5
c	0.5	0.5	0

3. También se puede visualizar gráficamente.

15 Gráfica de la cadena de Markov



Fuente: Elaboración propia

4. Podemos calcular la matriz de transición que nos quedará en el tiempo "n". Probaremos con n=5

	a	b	c
a	0.31250	0.34375	0.34375
b	0.34375	0.31250	0.34375
c	0.34375	0.34375	0.31250

5. Ahora veremos lo realmente interesante de este paquete, y es que podemos evitar hacer TODOS LOS CÁLCULOS que se han hecho a mano, y podemos obtener la matriz n-ésima y con ella, la matriz de probabilidad del año que deseemos. En este caso, la matriz de estado inicial es (0.5,0.2,0.3) y la calcularemos en t=6.

a	b	c
0.3359375	0.33125	0.3328125

Como hemos podido ver, facilita mucho la labor de observar valores futuros y nos ahorra muchos cálculos, que nos complicarían mucho el análisis. Vayamos al siguiente.

3.2. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (R)

En el caso de la DVS, no será necesaria la instalación de ningún paquete extra en R ya que la fórmula $\mathrm{A} = \mathrm{U}\sum\mathrm{V}^{\mathrm{t}}$ facilita mucho la labor (con un único comando)

Lo aplicaremos a un ejemplo cualquiera, para ver la reducción considerable de dificultad que experimentará gracias a R.

Ejemplo. Descomponer en valores singulares la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Tras insertar la matriz en R, metemos el comando svd de A y nos ofrece la solución directamente.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}$$

En R nos da directamente el resultado, y si respetamos la dimensión de cada matriz para que nos cuadre con la matriz resultante nos sale rápidamente el resultado final.

3.3. MÍNIMOS CUADRADOS EN UN MODELO LINEAL (Mathematica)

Enunciar el teorema sobre la solución mínimo cuadrática de norma mínima de un sistema de ecuaciones lineales. Aplicarlo para calcular la recta que más se ajusta a los siguientes datos, por el método de mínimos cuadrados.

x	**0**	**1**	**2**
y	**1**	**0**	**-3**

La recta será de la forma y = ax + b, entonces obtenemos el sistema de ecuaciones a los datos de la tabla:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{a+b} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{2a+b} &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

Ahora buscaremos la solución mínimo cuadrática de norma mínima:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

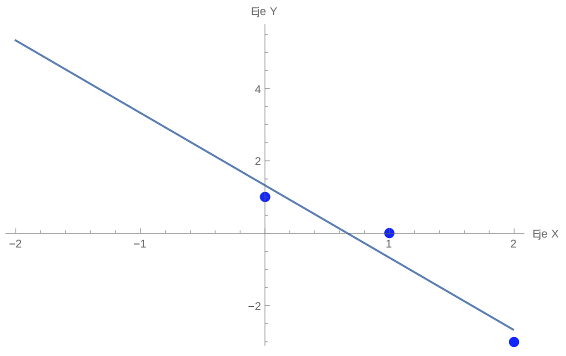
Tras hacer el rango de la matriz A y observar que es 2, se procederá con el cálculo de la fórmula $X = A^L B$ (todos los comandos aplicados en Mathematica están en el anexo correspondiente)

$$\mathbf{A^L} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{5/6} & \mathbf{1/3} & \mathbf{-1/6} \end{pmatrix}$$

$$X = A^L B = (\mathbf{-2} \quad \mathbf{4/3})$$

La recta buscada es $\boldsymbol{y = -2x + \frac{4}{3}}$

16 Gráfica de mínimos cuadrados del Mathematica



Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIÓN FINAL

Como conclusión, podemos afirmar que las aplicaciones algebraicas en el ámbito de la empresa que hemos estudiado pueden llegar a ser muy útiles. Para ellas podemos sacar en claro lo siguiente:

1. **Matriz de probabilidad:** En esta matriz, cada valor supone una determinada probabilidad de que un suceso pueda ocurrir o no. **Esta aplicación está bastante relacionada con la cadena de Markov y puede ayudar a predecir sucesos futuros** (algo que en series cronológicas es muy útil)

2. **Modelo de contabilidad agregativa:** Esta aplicación es otra manera de organizar la contabilidad de una empresa, **permite manejar los datos de una manera matricial y facilita la inserción de nuevos asientos y cuentas.**

3. **La Descomposición en Valores Singulares y el Análisis de Componentes Principales:** El ACP trata de disminuir las dimensiones lo máximo posible, para poder realizar esta disminución **se debe calcular y clasificar la importancia de cada dimensión del conjunto de datos**. Este cálculo se puede realizar de varias maneras:
   - **Se puede trabajar con la matriz de varianzas y covarianzas (o incluso la de correlaciones), calculando los valores y vectores propios** para conseguir y clasificar las dimensiones más importantes (esta manera de calcularlo es la más común)
   - Otro caso alternativo, **es usar la DVS en la matriz de datos X (no en las matrices mencionadas en el punto anterior) para calcular** y clasificar las dimensiones más relevantes.

   Básicamente, la DVS permite realizar los cálculos desde otra perspectiva (usando la matriz de datos en lugar de las de covarianza/varianza/correlación) y facilita los cálculos ya que se puede realizar fácilmente en R.

4. **Cadena de Markov:** Esta aplicación se fundamenta en la diagonalización para tratar de **predecir "valores futuros" gracias a la dependencia que existe entre el suceso a hallar y su antecesor.**

   Esta aplicación es bastante usada en ámbitos financieros como la bolsa, y para ello se basa en la fórmula $A = PDP^{-1}$, es decir, en la semejanza de D y A.

5. **Método de los mínimos cuadrados en modelos lineales:** En esta aplicación **hemos visto como trabajar en la regresión adaptando una recta a unos datos predefinidos**, con el fin de ilustrar gráficamente y matemáticamente la mejor recta posible. Tomará como base principal las soluciones mínimo cuadráticas de AX=B.

Por último, se ha elaborado un **apartado donde todas estas aplicaciones** (las que se puedan desarrollar por ordenador, evidentemente) **están resueltas gracias al software estadístico** (R, SPSS y Mathematica) junto con su correspondiente solución.

ANEXO

ANEXO I: FIGURAS O TABLAS

ANEXO II: COMANDOS Y PAQUETES

COMANDOS

1. **Diagrama dispersión en R Commander** (Ilustración 1)

```
>scatterplot(V2~V1,regLine=TRUE,smooth=FALSE,id=list(method='mahal',n=2),
boxplots=FALSE, data=Dataset)
```

2. **Cadena de Markov**

PAQUETES

```
>install.packages("markovchain")

>library(markovchain)
```

DATOS

```
>A = matrix(c(0,0.5,0.5,.5,0,.5,.5,.5,0),nrow = 3,byrow = TRUE)

>A
```

CADENA DE MARKOV

```
>markov=new("markovchain",transitionMatrix=A,states=c("a","b","c"),name="Cadena 1")

>markov

>summary(markov)

> plot(markov)

>n = 5 # El número de pasos al futuro

>mc ^ n

> Xo = c(0.5,0.2,0.3) #X en t = 0

>n = 6

>Xn = Xo*(mc^n)

>Xn
```

3. Descomposición en valores singulares

```
>Dataset

>svd(Dataset)

>Dataset%*%(svd(Dataset)$v)

>(svd(Dataset)$d)^2

>##Matriz de covarianzas

>S=t(Dataset)%*%as.matrix(Dataset)

>##Valores y vectores propios (para comparar)

>Eigen(S)

>##COORDENADAS DE LA GRAFICA

>V=eigen(S)$vectors

>as.matrix(Dataset)%*%V
```

4. Mínimos cuadrados (MATHEMATICA)

<u>COMANDOS PARA LOS CÁLCULOS</u>

$\mathrm{A} = \{\{0,1\},\{1,1\},\{2,1\}\}//\mathrm{MatrixForm}$

$\mathrm{B} = \{1,0,-3\}\ //\mathrm{MatrixForm}$

$$\mathrm{AL} = \mathrm{Inverse}\left[\mathrm{Transpose}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right].\mathrm{Transpose}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]//\mathrm{MatrixForm}$$

$\mathrm{X} = \mathrm{MatrixForm}[\mathrm{AL}.\mathrm{B}]$

$$\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 1/2\\ 5/6 & 1/3 & -1/6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$$

<u>COMANDOS PARA EL GRÁFICO</u>

```
recta = Plot[-2 x + 4/3, {x, -2, 2}, AxesLabel -> {"Eje X", "Eje Y"}];

puntos = ListPlot[{{0, 1}, {1, 0}, {2, -3}}];

Show[recta, puntos]; Show[%29, ImageSize -> 35 %]
```

5. Problema Mínimos cuadrados del apartado 3.4.3.1 (R)

```
>antiguedad=c(4.5,4.5,4.5,4.0,4.,4.,5,5,5.5,5,0.5,0.5,6,6,1,1,1)

>gastos=c(619,1049,1033,495,723,681,890,1522,987,1194,163,182,764,1373,978,466,549)

>X=antiguedad

>Y=gastos

# La estimación de mínimos cuadrados:

>mincuadrados<-lsfit(X,Y)$coefficients;mc

# Gráfica junto con la recta

>plot(antiguedad,gastos,xlab="antiguedad (en años)",ylab="Gastos de personal en un año ")

>modeloajustado<-lm(gastos~antiguedad)

>antiguedad.s<-seq(min(antiguedad),max(antiguedad),length=100)

>lines(antiguedad.s,predict(modeloajustado,data.frame(antiguedad=antiguedad.s)))
```

BIBLIOGRAFÍA

[LIBRO] Afifi, Abdelmonem y Clark, Virginia (1990), *Computer-aided multivariate analysis 1ºed*, Springer-Science+Business media, B.V **.**

[LIBRO] Anton, Howard (1986), *Introducción al álgebra lineal 1ºed*, LIMUSA.

[LIBRO] Barbolla, Rosa (1988), *Álgebra lineal y teoría de matrices*, Prentice-Hall.

[REVISTA ELECTRÓNICA O DISPONIBLE ONLINE] Bonifacio da Cruz, Isalino (2017), "*Aplicaciones del Álgebra Lineal*". Disponible on line:

https://www.monografias.com/docs112/aplicaciones-del-algebra-lineal/aplicaciones-del-algebra-lineal.shtml

[REVISTA ELECTRÓNICA O DISPONIBLE ONLINE] Eyzaguirre, Raúl (2014) "*Descomposición en valores singulares*". Disponible on line:

https://reyzaguirre.wordpress.com/2014/02/10/descomposicion-de-valor-singular/

[LIBRO] Lay C.,David (2007), *Álgebra lineal y sus aplicaciones 3ºed*, Pearson Educación

[CAPÍTULO DE LIBRO] López Camino, Rafael (2004), "*Aplicaciones lineales"*, Universidad de Granada, Tema 2

[LIBRO] Merino Gonzalez, Luis M. (2007), *Algebra lineal: con métodos elementales 2º ed*, Madrid: Thomson

[REVISTA ELECTRÓNICA O DISPONIBLE ONLINE] mpalanco (2014), "*Introducción al paquete igraph*". Disponible on line:

http://nubededatos.blogspot.com/2014/05/introduccion-al-paquete-igraph-para-r.html

[CAPÍTULO DE LIBRO] Palacios, Manuel (2010), *"Forma canónica de matrices"*, Universidad de Zaragoza.

[ARTÍCULO] Pérez Bolivar, Samuel (2012), *"Modelo de contabilidad agregativa en espacios vectoriales"*, Universidad Simón Bolivar.

[ARTÍCULO] Shiens, Jonathon (2014), *"A tutorial on Principal Component Analysis"*, pp. 5-11.